L’APPRENDIMENTO DELLA GEOMETRIA

Silvia Sbaragli
N.R.D., Bologna
DFA, SUPSI, Locarno (Svizzera)

Irene C. Mammarella
Dipartimento di Psicologia dello Sviluppo e dell’Educazione – Università degli Studi di Padova

«La Geometria può essere significativa solo se esprime le sue relazioni con lo spazio dell’esperienza […] essa è una delle migliori opportunità per matematizzare la realtà»
(Freudenthal, Mathematics as an Educational Task)

Pubblicato in: Sbaragli S., Mammarella I.C. (2010). *L’apprendimento della geometria.* In: Lucangeli D., Mammarella I.C. (2010). Psicologia della cognizione numerica. Approcci teorici, valutazione e intervento. Milano: Franco Angeli.

1 Il ruolo della geometria

La geometria è la più antica tra le teorie create dall’uomo che ha rappresentato per due millenni uno dei campi del sapere tra i più importanti della matematica, anzi per lungo tempo è stata assimilata alla matematica stessa (i matematici spesso chiamavano se stessi *geometri*).
Testimonianza significativa da questo punto di vista è la scritta riportata nel portico della famosa Accademia di Atene, dove Platone impartiva le sue lezioni, in cui compariva il seguente avvertimento: “*Non entri chi non conosca la Geometria*”.
Una lunga tradizione iniziata nell’antichità come studio della “misura della terra” e rafforzata con gli *Elementi* di Euclide, ci tramanda una geo-metria (appunto) fortemente radicata nell’esperienza. In effetti, il rapporto tra *geometria* e *mondo fisico* è molto stretto e rappresenta uno degli aspetti salienti che la caratterizzano e che, come vedremo nei prossimi paragrafi, rappresenta un momento fondamentale dell’apprendimento di tale disciplina: «[…] il difetto dello spirito matematico […] è di non

comprendere che un pensiero, il quale si appaghi di costruzioni astratte, senza la speranza, pur vaga, di cogliere in esse il quadro di una qualche realtà, sarebbe uno sterile istrumento dialettico» (Enriques, 1906). Secondo tale Autore *la geometria è la prima rappresentazione del mondo fisico.*
In questa ottica Giuseppe Peano (1894, p. 141) afferma: «Certo è permesso a chiunque di premettere quelle ipotesi che vuole, e sviluppare le conseguenze logiche contenute in quelle ipotesi. Ma affinché questo lavoro meriti il nome di Geometria, bisogna che quelle ipotesi o postulati esprimano il risultato delle osservazioni più semplici ed elementari delle figure fisiche».
Proprio la possibilità di una evidenza empirica delle proprietà espresse dalla geometria è stata per secoli alla base della fiducia nella verità assoluta della geometria stessa. Tale certezza si è attenuata con la scoperta delle geometrie "non-Euclidee" e soprattutto con l'acceso dibattito che ha caratterizzato la storia della matematica a partire dalla *Crisi dei Fondamenti* avvenuto a cavallo tra il XIX ed il XX secolo. In questo senso, Henri Poincaré distingue tra lo *spazio fisico* nel quale avvengono le nostre esperienze e quello *geometrico* astratto ed ideale: «[…] i principi della geometria non sono dei fatti sperimentali. […] È chiaro che l'esperienza gioca un ruolo insostituibile nella genesi della geometria: ma sarebbe un errore concludere che la geometria è una scienza sperimentale, anche solo in parte» (Poincaré, 1902, p. 90-92). Ancora più incisiva è la scelta di David Hilbert nelle *Grundlagen der Geometrie*, che segnano un vero e proprio momento di svolta, tagliando di fatto il legame tra la geometria e la realtà. La geometria diventa così una disciplina sempre più affrancata da ogni riferimento al reale: il criterio essenziale di validità diviene la correttezza formale del ragionamento e la coerenza di un sistema formale. Un sistema di assiomi dovrà essere coerente, ovvero non contraddittorio, e questa è la sola condizione logica richiesta per l'esistenza degli oggetti matematici definiti da esso. La Crisi dei Fondamenti portò quindi con sé il principio secondo il quale *la matematica è un'opinione*.

2 La geometria dal punto di vista didattico

È oggi quasi universalmente riconosciuto che l'aspetto teorico abbia la priorità rispetto ad una analisi sperimentale, ma se consideriamo la geometria dal punto di vista didattico collegato al processo di

insegnamento-apprendimento, il rapporto tra intuizioni connesse all'esperienza e il ragionamento geometrico resta fondamentale.
Condividiamo in effetti con Speranza (1987) la convinzione che una epistemologia per essere utile alla didattica ed essere effettivamente vicina all'effettiva costruzione del pensiero matematico, deve essere genetica e quindi anche sperimentale.
L'evoluzione del pensiero geometrico va quindi ricercato a partire dalle prime esperienze spaziali del bambino fino alle più ardite e moderne teorie.
Nei primi livelli scolastici questa disciplina è rivolta ad organizzare l'esperienza visiva, tattile, motoria degli allievi, puntando l'attenzione su alcune caratteristiche spaziali degli oggetti e organizzandosi in seguito razionalmente in modo sempre più autonomo. Ossia, inizialmente la geometria ha a che fare con sensazioni, esperienze e osservazioni esterne di tipo senso-motorio e procede poi per razionalizzazioni successive di queste prime osservazioni.
In questa evoluzione acquista un ruolo fondamentale il linguaggio naturale, che fornisce esso stesso degli orientamenti per organizzare l'osservazione e per interpretare il mondo. I bambini di scuola dell'infanzia e dei primi anni di scuola primaria tendono quindi a formarsi i concetti geometrici da un lato organizzando la *percezione*, dall'altro utilizzando il *linguaggio*.
In seguito, negli ultimi anni di scuola primaria e nella scuola secondaria di primo grado dovrebbe iniziare una sistemazione e razionalizzazione del sapere geometrico che continuerà in modo sempre più critico e profondo nella scuola secondaria di secondo grado e che dovrà tener conto che il valore formativo di tale disciplina viene messo in risalto da una trattazione che inglobi i diversi approcci possibili.
L'organizzazione geometrica va quindi didatticamente costruita attivamente da parte dell'allievo, piuttosto che data come prodotto già sistemato.
È stata proprio la mancanza di tale sensibilità didattica che ha portato storicamente ad un abbandono della geometria dall'insegnamento della scuola primaria. Nel 1867 alcuni illustri matematici italiani sancirono ufficialmente che l'unico modello epistemologicamente adeguato per questa disciplina era quello euclideo e riconoscendo improponibile una rigorosa sequenza di tale impostazione nella scuola primaria, la abolirono. Se ancora oggi la geometria risente di una accentuata marginalità (rispetto al curricolo di matematica) e di un eccessivo formalismo, riteniamo che ciò sia conseguenza, almeno in parte, di una visione epistemologica così radicale.

Eppure gli *elementi primi* dello scienziato non devono essere necessariamente gli elementi primi dell'allievo. Come sostengono D'Amore e Fandiño Pinilla (2009): «È grazie ad una relazione tra riflessioni epistemologiche e didattiche sulla matematica che si arriva al dibattito sugli *elementi primi*, per capire come non ci sia coincidenza tra elementi primi per uno studente alle prime armi e termini primitivi in matematica. Senza questa possibilità di riflessione critica, l'insegnante sarebbe portato a pensare che vi sia coincidenza».

La tendenza a voler riprodurre l'impostazione euclidea nell'insegnamento della scuola di base continua ancora oggi; molti insegnanti introducono questa disciplina iniziando da concetti come il punto, la retta e il piano, importanti per una trattazione razionale, ma distanti dall'esperienza dell'allievo o da definizioni che andrebbero invece considerate come punto di arrivo di un percorso di apprendimento costruttivo e personale dello studente. Inoltre, tale scelta comporta l'iniziale trattazione esclusiva della geometria piana, seguita solo dopo diversi anni da quella dello spazio, ma dal punto di vista didattico diverse sperimentazioni hanno messo in evidenza che la geometria tridimensionale (3D) rappresenta una lettura della realtà più intuitiva per il bambino essendo più vicina alle sue esperienze (Arrigo, Sbaragli, 2005). È sicuramente vero che la geometria dello spazio presenta, da un punto di vista adulto, maggiori difficoltà di sistemazione razionale rispetto alla geometria del piano; lo conferma il seguente passaggio di Fandiño Pinilla (2002, p. 68): «Platone [Rep. VII, 528] scriveva che, mentre la geometria bidimensionale è una scienza, quella tridimensionale (ai suoi tempi) ancora non lo è, dato che, diremmo noi oggi, non ne ha ancora lo "statuto"» ma, per l'apprendimento, la figura piana è certamente più sofisticata della solida, dato che tutto ciò che circonda il bambino è 3D.

Siamo consapevoli che ciascun oggetto o rappresentazione mostrata per far intuire un concetto matematico, non può che esserne solo un modello, e in quanto tale non potrà mai possedere le caratteristiche di idealità, perfezione, astrazione, generalità tipiche di un oggetto matematico, ma riteniamo che i modelli 3D risultano più vicini alla intuizione degli allievi, dato che per questi, a differenza di quello che avviene per quelli 2D, non devono far finta che non abbiano una dimensione. La nostra proposta didattica consiste nell'iniziare nella scuola dell'infanzia e primaria da figure 3D per poi giungere a quelle 2D e in seguito operare continui passaggi dal 3D al 2D e viceversa (Cottino, Sbaragli, 2004).

Dal punto di vista didattico ricordiamo inoltre il famoso testo di geometria del progetto MaSe (progetto matematica scuola elementare) di D'Amore (1983) che ha cambiato la storia dell'insegnamento della geometria nelle scuole primarie italiane; si tratta di un prezioso volume per insegnanti, oramai difficile da trovare e perciò sostituito nel Nuovo Progetto MaSE (nuovo progetto scuola elementare) dal testo Cottino et al. (2010).

3 Realtà e matematica

Partire dall'esperienza reale fornisce informazioni spaziali legate alla forma, alla grandezza, alla posizione… degli oggetti; caratteristiche che risultano importanti per un primo approccio all'apprendimento in campo geometrico ma che vanno didatticamente controllate per far emergere gradatamente aspetti sempre più concettuali.
Occorre cioè creare attività pensate allo scopo di armonizzare l'idealità (astrattezza) delle figure geometriche ed il loro rapporto con gli oggetti della realtà empirica. Tramite la geometria diamo un'interpretazione delle rappresentazioni spaziali e delle relazioni tra i vari enti considerati, ma nella visione geometrica non ci si preoccupa se il disegno considerato è effettivamente un triangolo rettangolo come richiesto dal problema o come abbiamo fatto a misurarlo e a saperlo; ciò che importa è come è fatto l'ente e quali sono le conseguenze che se ne possono dedurre; in geometria la realtà viene quindi completamente sostituita da rappresentazioni mentali.
Un quadrato, in termini geometrici, non è l'immagine di un oggetto reale – anche se può essere legato a qualche oggetto reale, per esempio ad un opportuno foglio di carta – ma condivide con esso quelle proprietà che sono determinate dalla sua definizione; lo dice bene Efraim Fischbein (1993): «I punti (oggetti zero-dimensionali), le linee (oggetti uni-dimensionali), i piani (oggetti bi-dimensionali) non esistono, non possono esistere nella realtà. (…) Questi sono costrutti mentali puri e semplici che si suppone non possiedano alcuna realtà sostanziale. (…) Le proprietà delle figure geometriche sono imposte o derivate dalle definizioni (sebbene possano essere ispirata da un oggetto reale). Un quadrato è un rettangolo avente i lati uguali. Partendo da queste proprietà si può andare avanti per scoprire le altre proprietà del quadrato».
Il richiamo agli aspetti pratici delle scienze sperimentali, pur essendo *necessario* nei primi livelli scolastici, può portare in errore in ambito geometrico e lasciare in ombra il fatto che questa disciplina riguarda verità eterne e universali. Occorre una grande sensibilità didattica per favorire il necessario connubio tra realtà e matematica; l'uso di modelli concreti può fornire un supporto efficace alle intuizioni matematiche, ma in certi casi può addirittura trasformarsi in ostacolo per la costruzione del sapere

(Maier, 1993, 1998). Come sostengono D’Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani e Sbaragli (2008, p. 117): «Occorre riflettere bene sul senso profondo della differenza che c’è tra scienze empiriche e matematica; va bene usare modelli concreti degli oggetti matematici, ovviamente, non se ne può fare a meno, ai primi livelli di scolarità; ma demandare a questi modelli la concettualizzazione è certamente il primo passo verso difficoltà nelle quali costringiamo gli allievi. Perché far loro credere che l’oggetto concreto sia il concetto?, che il modello empirico sia l’oggetto matematico? Perché non dirlo esplicitamente che c’è una differenza abissale? Perché non problematizzare la questione? In nome di una semplificazione e di una sicurezza che si vuol dare allo studente, in realtà, lo si obbliga a navigare a vista in un mare irto di scogli pronti a far arenare la nave della costruzione concettuale».

Geometria e ragionamento spaziale risultano essere quindi due ambiti di riflessione tendenzialmente distinti: il ragionamento spaziale, e più in generale le abilità spaziali, si riferiscono a gran parte del nostro adattamento alla realtà del mondo fisico nel quale viviamo; invece, come abbiamo ribadito più volte, non avviene altrettanto per la geometria. Nella teoria evolutiva elaborata dai coniugi van Hiele (1986) e che vedremo più in profondità nel prossimo paragrafo, viene proprio distinta la geometria come concettualizzazione dello spazio dalla geometria come teoria formale. L’ultimo livello dello sviluppo consisterà nella capacità di muoversi all’interno di un sistema ipotetico deduttivo, ovvero all’interno di una data assiomatica.

Va però ricordato che i due aspetti: figurale e concettuale, possono trovare un buon legame nella *teoria dei concetti figurali* elaborata da Fischbein fin dal 1963. In psicologia, concetti e immagini sono considerati due categorie distinte di entità mentali: i concetti sono rappresentazioni ideali di una classe di oggetti o di un fenomeno, mentre le immagini sono rappresentazioni sensoriali di un oggetto o di un fenomeno. Nei ragionamenti geometrici, però, queste due entità non sono così indipendenti: in una dimostrazione, per esempio, si operano alcuni passaggi, come se gli oggetti fossero reali, pur usando informazioni di natura concettuale. A questo proposito Fischbein (1993) afferma: «(…) Una figura geometrica può essere descritta come avente intrinsecamente proprietà concettuali. Tuttavia una figura geometrica non è un puro concetto. È un’immagine, un’immagine visiva. Possiede una proprietà che i concetti usuali non possiedono, cioè include la rappresentazione mentale di proprietà spaziali. Tutte le figure geometriche rappresentano costruzioni mentali che possiedono simultaneamente, proprietà concettuali e figurali».

Quando operiamo con enti geometrici, consideriamo le loro caratteristiche ideali, ma senza distinguerle dall'immagine concreta cui ci riferiamo. Si può concludere, quindi, che l'oggetto del ragionamento in geometria non è né un puro concetto, né una pura immagine, ma un *concetto figurale:* «…entità mentali che riflettono proprietà spaziali (forma, posizione, grandezza) e, allo stesso tempo, possiedono qualità concettuali – come l'idealità, l'astrattezza, la generalità, la perfezione» (Fischbein, 1993). I concetti figurali includono quindi la figura come proprietà intrinseca, intesa come immagine interamente controllata dalla definizione.

4 Lo sviluppo dei concetti geometrici

Nonostante l'indubbia importanza della geometria, sottolineata anche nei paragrafi precedenti, la ricerca psicologica in quest'ambito non appare essersi sviluppata come avrebbe meritato. Se è vero, come dimostra il crescente numero di pubblicazioni scientifiche, che l'interesse per l'aritmetica è andato sempre più crescendo negli ultimi anni, non si può dire altrettanto per la geometria.
Piaget e Inhelder (1979), furono tra i primi ad interessarsi di geometria, ed in particolare dello sviluppo del pensiero geometrico nel bambino. Nel libro *"La rappresentazione dello spazio nel bambino"*, i due Autori distinguevano tra *spazio percettivo*, ovvero quello percepito dal bambino attraverso l'attività senso-motoria, e *spazio rappresentativo* riferito allo spazio che il bambino può rappresentarsi a livello intellettuale con la comparsa del linguaggio.
Piaget, inoltre, individuava tre grandi classi di rapporti spaziali:
- i rapporti *topologici*, che riguardano per esempio la vicinanza, la separazione, l'ordine e i diversi tipi di connessione fra i vari punti dello spazio, considerati indipendentemente da ogni operazione di carattere metrico;
- i rapporti *proiettivi*, cioè quei rapporti spaziali che sono in stretta relazione con il punto di vista da cui si osservano gli oggetti e variano con il variare di questo;
- i rapporti *euclidei*, che non sono indipendenti dalle operazioni di misura come quelli topologici, né hanno carattere soggettivo come quelli proiettivi, ma sono invece, nel contempo, oggettivi e definibili mediante ricorso all'unità di misura.

Attraverso i suoi esperimenti, Piaget arrivò alla conclusione che i bambini di 4 anni giungono già a dare una corretta rappresentazione di tutti i rapporti topologici, mentre per una corretta rappresentazione dei rapporti spaziali euclidei e proiettivi bisogna aspettare fino a dopo gli 8-9 anni, quando cioè i bambini hanno raggiunto un tipo di pensiero operatorio e reversibile. Secondo queste ricerche, anche le difficoltà legate a false relazioni tra perimetro e area sembrano perdurare fino ai 12 anni e sono assai poco connesse con lo sviluppo linguistico del soggetto.
Sono questi gli studi classici che hanno condizionato per alcuni decenni le successive analisi sul tema; essi erano basati soprattutto sugli insuccessi dei giovani allievi a diversi stadi di età.
Le ipotesi di Piaget, tuttavia, sono state spesso smentite da ricerche successive e sottoposte a diverse critiche da parte degli studiosi successivi; rimandiamo a Resnick e Ford (1981, cap. 7).

Nei decenni successivi, è stata proposta una teoria alternativa a quella piagetiana riguardante lo sviluppo del pensiero geometrico. Nello specifico, Pierre e Dina van Hiele (van Hiele, 1986; Crowley, 1987) hanno cercato di individuare dei veri e propri livelli di sviluppo.
1. Ad un primo livello, denominato *livello visivo*, i bambini riconoscono le forme presentate loro a livello percettivo, ma non possono rappresentarle mentalmente, ovvero non sono in grado di creare delle immagini mentali delle forme geometriche. A questo livello, una figura è un rettangolo "perché è simile ad una porta", non vi è, pertanto, una comprensione delle proprietà delle figure. I bambini di questo livello possono apprendere il vocabolario geometrico, identificare e riprodurre le figure in modo corretto.
2. Al secondo livello, denominato *descrittivo-analitico*, i bambini iniziano a riconoscere le figure in base alle loro proprietà. Le immagini perdono di importanza rispetto ai loro attributi, ma le proprietà non sono ancora ordinate, e i bambini non sono ancora in grado di differenziarle in termini di definizioni e proposizioni, e non sono ancora capaci di spiegare le relazioni tra le varie figure geometriche. Ad esempio un quadrato non è ancora riconosciuto come un particolare rettangolo.
3. Il terzo livello è denominato delle *deduzioni informali o della geometria euclidea*. Il bambino comincia ad osservare le varie relazioni tra le figure dal punto di vista logico, ad esempio il quadrato è un caso particolare di rettangolo poiché soddisfa tutte le proprietà del rettangolo. Questo presuppone la conoscenza di una terminologia specifica appropriata e delle definizioni, così da poter riconoscere classi di figure e dedurne alcune proprietà. A questo livello, tuttavia, non vi è ancora una comprensione degli assiomi e delle dimostrazioni.

4. Al quarto livello, *deduttivo*, o della *logica formale*, i ragazzi cominciano ad essere in grado di distinguere formalmente tra una proposizione e la sua inversa, e possono capire le dimostrazioni, i postulati, gli assiomi ed i teoremi. Il pensiero si occupa del significato di deduzione, del reciproco di un teorema, della condizione necessaria e sufficiente.
5. L'ultimo livello, del *rigore geometrico*, consente agli studenti di apprendere la geometria non-euclidea e di confrontare diversi sistemi di assiomi. La geometria viene pertanto rappresentata in modo astratto. I Van Hiele non forniscono esempi o illustrazioni di questo livello che comunque considerano scolasticamente assai più raro ed eventualmente presente a livelli più alti di istruzione.
Sulla base di alcuni studi sperimentali, Clements e Battista (1992) hanno inserito un livello precedente a quello visivo, un livello zero, denominato *di pre-riconoscimento*, nel quale i bambini percepiscono le forme in modo corretto ma non sono in grado di classificarle o di riprodurle attraverso il disegno.
Oltre a descrivere vari livelli di sviluppo del pensiero geometrico, i van Hiele hanno individuato alcune proprietà del modello, utili principalmente agli insegnanti, dal momento che possono fornire indicazioni inerenti la didattica della geometria.

a. La proprietà *sequenziale.* Come nella gran parte delle teorie dello sviluppo, il passaggio da un livello al successivo avviene nell'ordine proposto dal modello. Per passare al livello successivo è indispensabile che lo studente abbia acquisito le strategie del livello precedente.
b. La proprietà del *passaggio tra i livelli.* I progressi da un livello al successivo dipendono non tanto dall'età ma dall'educazione fornita al bambino. La completa assenza di un'istruzione formale non consentirebbe alcuno sviluppo, pertanto i metodi di insegnamento sono fondamentali, alcuni favoriscono il passaggio ad un livello successivo, altri lo impediscono. La maturazione che conduce ad un livello superiore sembra essere un processo essenzialmente legato all'apprendimento e all'istruzione e non di ordine biologico. È possibile dunque favorire ed accelerare tale processo. Così come un bambino non impara le regole grammaticali attraverso un insegnamento esplicito, ma le deduce dall'uso corrente applicandole per imitazione e per tentativi ed errori, così impara la matematica e, in particolare, la geometria agendo su di esse in modo attivo.
c. La proprietà *intrinseca ed estrinseca.* L'oggetto di interesse di un dato livello, diventa oggetto di studio del livello successivo. Ad esempio nel primo livello il bambino impara a denominare le figure in base a caratteristiche percettive. Ogni figura possiede delle proprietà, ma

queste possono essere scoperte, comprese ed analizzate, solo al secondo livello.

d. La proprietà *linguistica.* Ogni livello è caratterizzato da un utilizzo specifico del linguaggio che può essere considerato corretto all’interno di quel particolare livello, ma può essere ulteriormente ampliato ad un livello successivo. Ad esempio una figura può avere più di un nome: un quadrato è un rettangolo, ma è anche un parallelogramma e un quadrilatero. Tali distinzioni non sono utilizzabili al secondo livello, ma diventano fondamentali dal terzo livello in avanti.
e. La proprietà della *discrepanza.* Il tipo di educazione fornita deve essere coerente con il livello dello studente; se viene fornita un’istruzione che si colloca ad un livello più alto, lo studente incontrerà difficoltà nel seguire i processi di pensiero formulati dall’insegnante. Come sostenevano gli stessi van Hiele, infatti, due persone che ragionano a due diversi livelli hanno difficoltà nel comprendersi. Ciò accade spesso tra insegnante e studente. Nessuno dei due riesce a capire il percorso mentale dell’altro ed il loro dialogo continua unicamente poiché lo studente tenta di intuire il pensiero dell’insegnante e ad esso si uniforma. I ragazzi non riescono a maturare un vero e proprio apprendimento se imparano, per abitudine, a manipolare relazioni matematiche che non conoscono e delle quali non hanno mai visto la nascita. Essi finiscono così per disporre senza consapevolezza e padronanza, ma solo per imitazione, della stessa unica rete di conoscenze dell’insegnante, identica per tutti, nella quale le relazioni sono di tipo logico e deduttivo. È difficile per lo studente conservare nella memoria a lungo termine e soprattutto padroneggiare con competenza una rete di relazioni così costruita, non fondata su esperienze sensoriali personali. Nel migliore dei casi egli non conoscerà altro, oltre a ciò che gli è stato insegnato. Ciò è fortemente legato a costrutti rientranti nella ricerca in didattica della matematica come l’idea di *contratto didattico* (D’Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, Sbaragli, 2008). Inoltre, in questa trattazione rientra anche la problematica dell’uso del linguaggio da parte dell’insegnante. Come sostengono D’Amore e Fandiño Pinilla (2009): «Se la convinzione (debole) dell’insegnante è che il linguaggio che si usa in matematica sia univocamente ed eternamente determinato a priori dalla comunità scientifica, non potrà che pretendere dall’allievo un cieco uso di esso, senza vie personali; il che porta spesso ad una sorta di tentativo di imitazione acritica da parte dello studente, una sorta di vuota e sterile malacopia del linguaggio che costituisce per la classe un miraggio inarrivabile; in D’Amore (1993) abbiamo chiamato “matematichese”

> questa lingua d'aula, dando varie prove della sua esistenza e dei suoi caratteri negativi».

La proprietà della discrepanza del modello di van Hiele, ci permette di introdurre nel prossimo paragrafo il concetto di misconcezione, o malinteso, che spesso si crea nell'insegnamento della geometria ad opera dell'insegnante, ma che altre volte è intrinseco allo sviluppo di un dato concetto e, pertanto, indipendente dal tipo di insegnamento fornito.

Per un approfondimento…

Lo sviluppo del concetto di forma, misura ed area

Di seguito sono riportati alcuni esempi che riguardano lo sviluppo dei concetti di forma, misura e area sulla base di diversi approcci teorici.
Per quanto riguarda la capacità di discriminare tra differenti forme geometriche, secondo Piaget e Inhelder (1979) inizialmente i bambini discriminano le forme in base a caratteristiche topologiche, quali aperto-chiuso, in seguito, verso gli 8 anni sono capaci di distinguere tra diverse forme rettilinee chiuse (ad esempio distinguono un rombo da un rettangolo). Altri studiosi però hanno dimostrato che già a 2-3 anni i bambini sono capaci di riconoscere forme curvilinee e rettilinee (Lovell, 1959; Page, 1959) e dai 4 anni sono in grado di denominare correttamente alcune figure quali il cerchio, il quadrato e il triangolo (Giofrè, Mammarella, Lucangeli, 2009). Il ruolo del linguaggio nel processo di identificazione delle forme e delle figure geometriche è fondamentale. Secondo una prima ipotesi, il bambino apprende, inizialmente, a rispondere alla domanda "Di che forma si tratta?" e costruisce i concetti di "quadrato" o "cerchio" sulla base di pochi esempi concreti. In seguito, la parola viene applicata a figure prototipiche, e solo dopo che questo avviene, egli costruisce mentalmente la categoria che comprende tutti i quadrati o tutti i cerchi. Pertanto il nome e la percezione della forma aiutano a sviluppare delle categorie che comprendono le caratteristiche più rilevanti (i.e., attributi) di una data figura (Sandhofer, Smith, 1999). La teoria dell'*interazionismo gerarchico* (Mervis, Rosch, 1981), invece, ipotizza che inizialmente il bambino costruisca un prototipo basato sulle caratteristiche percettive a cui, solo gradualmente, vengono aggiunte le conoscenze dichiarative basate sul linguaggio, relative alle proprietà e agli attributi di una certa forma. Alcune figure simmetriche, come il cerchio ed il quadrato, hanno un numero limitato di immagini prototipiche, e per tale motivo i bambini sono più accurati nel classificarle già a partire dai 3 anni. Al

contrario, il rettangolo ed il triangolo generico hanno un maggior numero di immagini prototipiche che spesso inducono in errore.
Per quanto riguarda il concetto di misura, Piaget, Inhelder e Szeminska (1960) in alcuni esperimenti, osservavano che, bambini di 4-5 anni dopo aver aggiunto un terzo oggetto tra due oggetti disposti su un tavolo, giudicavano cambiata la distanza tra i due oggetti originali. In un altro esperimento, i bambini valutavano due strade che collegano due punti, della stessa lunghezza, sebbene una fosse diritta e l'altra contenesse delle curve. Ricerche successive hanno confermato che sia bambini di 4 anni sia approssimativamente la metà di quelli di 5-6 anni, mostrano tale pattern di risultati (Miller, Baillargeon, 1990). Al contrario, studi più recenti, hanno evidenziato che, nel compito della distanza tra due punti collegati da due strade, il 40% dei bambini di 4 anni è capace di non cadere nell'errore, se vengono fornite delle istruzioni corrette (Fabricius, Wellman, 1993). Attualmente, sebbene i ricercatori concordino sul fatto che l'acquisizione del principio di conservazione della lunghezza è necessario per comprendere appieno il concetto di misura, non necessariamente i bambini devono aver acquisito il principio di conservazione prima di iniziare a sviluppare una qualche idea intuitiva sul concetto di misura (Boulton-Lewis, 1987; Clements, 1999; Hiebert, 1981; Petitto, 1990). È però, solo dopo la seconda classe della scuola primaria, anche grazie all'istruzione, che i bambini incrementano considerevolmente le proprie conoscenze sul concetto di misura. Inoltre, la ricerca di Chamorro (2001-2002) relativa alla misura dimostra la complessità di tale tema, specie per quanto concerne il suo apprendimento. In questo studio vengono fatte analisi di esperienze realizzate nella scuola primaria a proposito del problema dell'insegnamento-apprendimento della misura; lo scopo di questo lavoro è di contribuire alla realizzazione di sapienti *situazioni a-didattiche* e *ingegnerie*[1] tese a eliminare o almeno a contenere le ben note difficoltà di apprendimento.
Piuttosto complesso risulta anche lo sviluppo del concetto di area. I bambini in età prescolare sembrano considerare una sola dimensione, o un unico aspetto saliente di una figura per stimare la differenza di un'area rispetto ad un'altra (Bausano, Jeffrey, 1975; Maratsos, 1973; Mullet, Paques, 1991; Piaget, Inhelder, Szeminska, 1948, 1960; Piaget, Inhelder, 1962). Fino ai 5-6 anni, la strategia più funzionale impiegata dai bambini è quella della sovrapposizione, che consiste proprio nel sovrapporre due figure per verificare quale possiede l'area maggiore, confondendo così i

[1] Per i termini specifici della didattica della matematica si veda D'Amore (1999).

concetti di congruenza con quello di estensione.[2] Tra i 6 e gli 8 anni è frequente osservare l'utilizzo di una regola basata sull'estensione lineare, quindi i bambini, ad esempio, considerano la lunghezza della diagonale di un rettangolo per stimare l'area. È da rilevare, tuttavia, che nella maggior parte delle ricerche che hanno indagato la comprensione del concetto di area, non veniva data la possibilità di interagire con le figure: bambini dell'età di 3 anni a cui era chiesto di contare i quadratini disegnati all'interno delle figure, piuttosto che compiere una semplice stima percettiva, erano, al contrario, capaci di fornire una risposta corretta. Inoltre queste prove spesso non vengono confrontate con altre effettuate in seguito ad un'efficace azione didattica, o ad interventi di potenziamento specifici, che potrebbero notevolmente modificare i risultati ottenuti. Da questo punto di vista, di rilievo è la ricerca di Giovannoni (1996), dove si discutono e si ripetono celebri esperimenti di Piaget sul problema della comprensione del concetto di superficie in bambini di 3-6 anni; si dimostra che tale concetto non è di per sé al di fuori della portata dei bambini, come si è ritenuto in passato, ma questa conquista dipende dalle condizioni al contorno ambientali, soprattutto riferite al linguaggio e alla proposta di modelli adeguati specifici. Dunque, il linguaggio specifico ha profonde incidenze sulla costruzione dei concetti in gioco: l'uso di un ambiguo aggettivo "grande" viene sostituito lentamente e consapevolmente da "esteso", comportando un notevole successo apprenditivo anche presso bambini di 5 anni.
Secondo Wolf (1995) i bambini sono capaci di utilizzare regole complesse, solo se hanno una certa familiarità con i materiali e gli obiettivi del compito. Anche Gentner (1983) alcuni anni prima, pur con molte cautele, suggerisce l'uso di modelli semplici per i primi approcci alla geometria in generale e allo studio delle superfici in particolare. Questo lavoro fa riflettere criticamente sull'uso di modelli: occorre che non siano troppo vincolanti ma sono d'altra parte necessari.
Diverse ricerche in ambito didattico hanno però messo in evidenza che per quanto concerne i concetti di perimetro, area e volume oltre ad ostacoli epistemologici derivanti dalla complessità dei concetti in sé, vi sono anche diversi ostacoli didattici generati dall'insegnante e che si oppongono alla costruzione di una conoscenza soddisfacente su questi temi (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2006; Sbaragli, 2006).

[2] Naturalmente, data l'età degli allievi, resta sempre il forte sospetto che si tratti di significati diversi dati alle singole parole, rispetto alle attese dell'adulto: "uguali", "estesi", "grandi", … sono significati che appaiono confusi e a volte interscambiabili in giovani allievi.

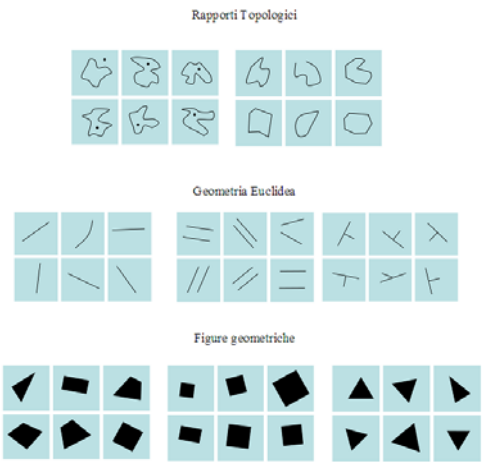
Per un approfondimento…

Esistono principi geometrici innati?

Le ricerche degli ultimi vent'anni dimostrano che i neonati possiedono delle competenze fisiche e matematiche: sono capaci di stimare numerosità (Wynn, 1992), di identificare gli oggetti (Xu, Carey, 1996; Needham, 2001; Wilcox, Schweinle, 2002), di codificare la posizione degli oggetti (Newcombe, Huttenlocher, Learmonth, 1999) ecc.

Esistono inoltre anche alcune ricerche che dimostrano la presenza di competenze geometriche nei neonati e nei bambini molto piccoli. Káldi e Leslie (2005) hanno osservato che a 6,5 mesi i bambini sono capaci di identificare le figure di quadrato e cerchio e di ricordarne la loro posizione nello spazio. Ma già a partire dai 2-3 mesi, sembra che si sviluppi la capacità di distinguere figure geometriche della stessa forma ma con diverso orientamento (si veda Slater, Morison, Town, Rose, 1985). Kavšek (1999) ha dimostrato che dagli 8 mesi i bambini sono in grado di distinguere una figura tridimensionale come un cilindro, da una bidimensionale. Altre ricerche, infine, dimostrano che i bambini sono in grado di rappresentarsi ed utilizzare *cue* geometrici. In tali studi, solitamente, il bambino è posto all'interno di uno spazio tridimensionale di una data forma e, dopo un periodo di familiarizzazione, in cui viene mostrato un target interessante per il bambino (ad esempio un gioco) in un angolo dell'ambiente, al bambino viene mostrato l'ambiente con il gioco posizionato in un angolo diverso. Se il bambino guarda più a lungo tale scena, se ne deduce che egli sia capace di usare alcune informazioni geometriche (esempio: posizione, distanza) (Hermer, Spelke, 1996; Learmonth, Newcombe, Huttenlocher, 2001; Lourenco, Huttenlocher, 2008).

In una recente ricerca, Dehaene, Izard, Pica e Spelke (2006) si sono chiesti se alcuni principi geometrici sono intrinseci al pensiero umano, ovvero se si riescono ad individuare dei principi geometrici innati. Per rispondere a questa domanda hanno testato bambini ed adulti di una tribù amazzonica, chiamata Mundurukù. I bambini e gli adulti testati nella loro ricerca avevano sempre vissuto nel villaggio isolato ubicato presso il fiume Cururu in Amazzonia, e non avevano ricevuto alcun tipo di educazione formale. C'è da aggiungere che il linguaggio matematico dei Mundurukù è molto povero; possiedono le parole-numero: uno, due, tre, quattro, cinque (letteralmente una mano), dieci (due mani) e quindici (tre mani) e per quanto riguarda la geometria, possiedono parole specifiche per i concetti di linea, punto, lato e figura curva. Gli Autori della ricerca, per testare la presenza di concetti geometrici innati, hanno creato una prova in cui, per ogni concetto (ad esempio rapporti topologici, figure geometriche, figure simmetriche) venivano mostrate 6 figure, ed il compito del partecipante consisteva nell'individuare l'intruso, ovvero la figura che non aveva niente in comune con le altre cinque. In questo modo veniva ridotto al minimo non solo l'uso del linguaggio, ma anche la possibilità di fornire dei suggerimenti (alcuni esempi di stimoli sono rappresentati nelle figure sottostanti).



I risultati dimostrano che esistono dei principi geometrici innati, ovvero gli indigeni Mundurukù sono in grado di rispondere agli item appartenenti alle seguenti categorie di concetti geometrici: rapporti topologici, geometria euclidea (es., linea, punto, perpendicolarità, angolo retto), figure geometriche (es., quadrato, triangolo, cerchio) e proprietà metriche (es. equidistanza tra punti). Tuttavia, gli indigeni dell'Amazzonia, non sono capaci di rispondere correttamente agli stimoli della categoria trasformazioni geometriche, nei quali sono raffigurate traslazioni, simmetrie e rotazioni. Un altro risultato interessante riguarda la differenza tra adulti Mundurukù (con prestazioni peggiori) ed americani (con prestazioni migliori), ma la mancata differenza tra bambini Mundurukù ed americani. In altre parole, i bambini americani scolarizzati, mostravano esattamente le stesse prestazioni degli indigeni dell'Amazzonia della stessa età. Tale dato dimostra che le enormi differenze culturali ed educative non vanno ad incidere su quelli che possono essere definiti i concetti geometrici a base innata che sono presenti indipendentemente dalla cultura e dall'educazione.

5 Le misconcezioni in didattica della matematica

Un termine molto usato da decenni nella ricerca in didattica della matematica è la parola "misconcezione"; tale parola viene interpretata in modi diversi dai vari Autori ma assume nella maggior parte dei casi semplicemente connotati negativi, come sinonimo di "errore", "giudizio erroneo", "idea sbagliata", ma anche "equivoco" o "malinteso"; si trova intesa anche nel senso più esteso di "concezione fallace". Per questa ragione le misconcezioni vengono spesso citate quando si fa riferimento alla didattica relativa agli errori.
Molti Autori concordano sul fatto che i primi usi di questo termine, nel senso di "errore" o di "malinteso", si hanno nel dominio della fisica o dell'economia. Si fa infatti riferimento di solito a lavori di Di Sessa (1983); di Kahneman e Tversky (a partire dal 1982) riguardo ai processi decisionali; di Voss et al. (1989).
Una delle prime apparizioni documentate del termine *misconception* in matematica avviene in USA nel 1981, ad opera di Wagner (1981), in un lavoro che tratta dell'apprendimento di equazioni e funzioni; sempre nel 1981 esce un celebre testo di Kieran (1981) sull'attività di risoluzione delle equazioni. Appaiono poi numerosi lavori nel 1985 nei quali il termine "misconcezione" è esplicito: Schoenfeld (1985), Shaughnessy (1985) e Silver (1985), che lo usano per lo più a proposito di problem solving, insieme alle convinzioni o per spiegarne le interazioni.
In Silver (1985, pp. 255-256) è detto esplicitamente che vi è un forte legame tra le misconcezioni e le convinzioni errate.
In Schoenfeld (1985, p. 368) si evidenzia come gli studenti possano sviluppare in modo corretto delle concezioni scorrette, soprattutto per quanto riguarda procedure.
Risulta quindi evidente che nella prima metà degli anni '80 ci fu un intenso lavoro degli studiosi di didattica della matematica su questo tema.
In seguito diversi Autori hanno preso in esame in maniera critica il sostantivo misconcezione, evitandone in alcuni casi anche l'uso del termine (si veda D'Amore e Sbaragli, 2005), ma noi riteniamo che l'attenzione a questo costrutto, fin dal suo apparire nel mondo delle scienze, sia stato molto produttivo perché ha costretto gli studiosi a non identificare più gli

errori come qualche cosa di assolutamente negativo, da evitare a tutti i costi, ma come a prodotti umani dovuti a situazioni in via di evoluzione. Sempre più, negli anni, si è venuto a delineare un significato condiviso di "misconcezioni" come cause di errori o meglio ancora cause *sensate* di errori, cause che sono spesso ben motivabili ed a volte addirittura convincenti.
È dunque innegabile il fatto che questo tipo di studi ha costretto a vedere le misconcezioni come il frutto di una conoscenza, non come una assoluta mancanza di conoscenza. Da questo punto di vista, l'approccio da noi scelto è quello di conservare tale termine e di analizzarlo in modo più costruttivo, fornendogli un'interpretazione più elaborata e meno negativa che tenga conto dell'attuale ricerca in didattica della matematica e che permetta di indagare più in profondità le cause del mancato apprendimento.
Da questo punto di vista, inizialmente in D'Amore (1999, p. 124) e successivamente in D'Amore e Sbaragli (2005, p. 19) si parla di misconcezione non come situazioni del tutto o certamente negative, ma anche come possibili momenti di passaggio, in corso di sistemazione, a volte necessari per la costruzione di un concetto.
Le misconcezioni così intese sono state da noi distinte in due grandi categorie: *"inevitabili"* ed *"evitabili"* (Sbaragli, 2005, p. 56 e succ.); le prime sono quelle che *non dipendono direttamente dalla trasposizione didattica effettuata dal docente né dall'ingegneria didattica*, ma dalla necessità di dover dire e mostrare qualcosa per poter spiegare un concetto, che non potrà mai essere esaustivo di ciò che si sta proponendo e dalle caratteristiche ontogenetiche legate all'allievo; mentre le seconde *dipendono proprio dalle scelte che l'insegnante prende per effettuare la trasposizione didattica* e scelte concernenti *l'ingegneria didattica* che possono condizionare negativamente la formazione degli allievi.
Le misconcezioni "inevitabili" possiamo quindi considerarle come momenti di passaggio necessari verso la costruzione del modello auspicato di un concetto matematico. In questo senso, tali misconcezioni non sono necessariamente eliminabili, né costituiscono del tutto un danno; potrebbero invece apparire come un momento delicato e necessario di passaggio da una prima concezione ingenua e spontanea a una più elaborata e auspicata per quel concetto.
Le "evitabili", invece, risultano essere non necessarie e possono derivare dall'azione didattica dell'insegnante in aula. Ossia, ciò che vogliamo far comprendere è che le cause dell'erronee interpretazioni effettuate dagli allievi, non sono sempre imputabili all'allievo stesso, ma possono dipendere dal tipo di informazione che viene fornita dall'insegnante su un determinato sapere.

Tra quest'ultimo tipo di misconcezioni ricordiamo quelle geometriche che dipendono da posizioni vincolanti e che possono essere rilette alla luce del prossimo paragrafo. Sembra ormai una prassi scolastica, non solo della scuola primaria, legare l'apprendimento geometrico a termini spaziali che derivano dalla posizione dalla quale si osserva un oggetto matematico. Termini come: orizzontale, verticale, obliquo, laterale, … sono presenti su tutti i libri scolastici e appaiono come parole specifiche dell'àmbito matematico, pur rientrando in realtà in altri contesti. Questa scelta didattica vincola la posizione che deve assumere la rappresentazione dell'oggetto del quale si sta parlando, provocando così misconcezioni nella mente degli allievi.

È pur vero che, come sostengono Stavy e Tirosh (2000): «È stato affermato che le linee verticali e orizzontali costituiscono le direzioni fondamentali su cui gli oggetti possono essere orientati in relazione alla gravità. Evidentemente, la percezione delle linee verticali e orizzontali è programmata nel sistema visivo dei mammiferi»; ma l'uso di questi termini in campo geometrico mette in evidenza la scelta reiterata e diffusa di dare importanza alla posizione dell'oggetto del quale si sta parlando, piuttosto che all'essenza dell'oggetto stesso. Invece di rilevare le caratteristiche "assolute" dell'oggetto matematico, come il parallelismo, la perpendicolarità, la congruenza dei lati o degli angoli, l'illimitatezza, …, si mettono in evidenza le proprietà "relative" dell'oggetto, che dipendono dal punto di vista, facendo così puntare l'attenzione degli studenti su caratteristiche concrete, dirette e percepibili, importanti in un contesto di vita reale, ma di ostacolo in un mondo geometrico dove non esistono "direzioni privilegiate".

Come abbiamo più volte ribadito, riteniamo che la geometria debba essere considerata come uno strumento utile per la lettura del mondo che ci circonda, una modellizzazione dello spazio materiale nel quale siamo immersi, ma sosteniamo che un obiettivo che si deve raggiungere in àmbito geometrico è che lo studente riesca ad osservare un oggetto matematico nella sua "essenza", analizzando con elasticità le sue peculiari caratteristiche. Questo è possibile solo se non si assoggetta l'apprendimento a rigidi vincoli spaziali; in effetti, se ci si abitua ad osservare ed analizzare gli oggetti indipendentemente dalla posizione che essi assumono, si è poi più abili nel riconoscere ed analizzare la situazione anche se cambia la proposta. In definitiva, si diventa più capaci di modellizzare la realtà e di dominare le situazioni spaziali in tutta la loro complessità; ciò è maggiormente possibile se si fa anche attenzione all'uso dei termini linguistici che si propongono in classe.

Per un approfondimento…

Misconcezioni "evitabili" e "inevitabili" in ambito geometrico

Per rendere più esplicita la distinzione tra misconcezioni "inevitabili" ed "evitabili", riportiamo di seguito due esempi per ciascuna categoria rientranti in àmbito geometrico. (Altri esempi si trovano in Martini e Sbaragli, 2005; D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, Sbaragli, 2008).

Esempi di misconcezioni "inevitabili"

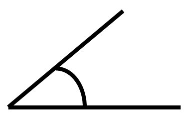
1. Quando un insegnante mostra per la prima volta ad un bambino di scuola dell'infanzia un modello di cubo rosso, di legno, di una certa dimensione e gli dice: «Guarda, questo è un cubo», il bambino potrebbe credere che il nome "cubo" deve essere attribuito ad un oggetto rosso, di legno, di quelle determinate dimensioni. Tutte queste informazioni percettive, che nel contesto della matematica sono avvertite come "parassite", potrebbero essere invece quelle considerate dall'allievo come caratterizzanti il concetto del quale si sta parlando, essendo tra l'altro più percepibili e immediate.
Tale fraintendimento può derivare solo indirettamente dalle scelte effettuate dall'insegnante, in quanto sono una conseguenza dell'esigenza *inevitabile* di dover iniziare a dire e mostrare qualcosa per poter cominciare a spiegare un concetto.
Ma se l'insegnante avrà in seguito la sensibilità didattica di creare le condizioni per superare queste misconcezioni, mostrando modelli di cubi, non di legno, non rossi, non di quelle dimensioni, per poi fornire nel tempo diverse rappresentazioni in vari registri, il bambino lentamente compirà dei passi in avanti nella costruzione del concetto, ampliando le vecchie immagini-misconcezioni, fino a creare una nuova immagine in grado di contemplare tutte le successive sollecitazioni che gli verranno proposte. Ossia, lentamente lo studente annullerà i tratti dell'oggetto che non lo caratterizzano dal punto di vista matematico, per puntare l'attenzione su quelli distintivi che invece lo rappresentano in qualsiasi contesto; in tal modo l'insegnante eviterà il formarsi di modelli scorretti nella mente dello studente. Al contrario, se l'insegnante mostrerà all'allievo sempre la stessa rappresentazione del concetto, senza pensare alle conseguenze che questa sua scelta potrebbe comportare, si potrebbero verificare *ostacoli di tipo didattico* per il futuro apprendimento.
La misconcezione che ne potrebbe derivare in quest'ultimo caso si può dunque considerare "evitabile".

L'"inevitabilità" delle misconcezioni, oltre a dipendere *dalla necessità di dover far uso di rappresentazioni per poter spiegare un concetto,* può anche essere imputata alla *necessaria gradualità del sapere,* così com'è mostrato nel seguente esempio.

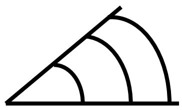
2. Lo studente ha imparato negli anni a riconoscere il quadrato e il rettangolo tramite sollecitazioni scolastiche ed extra-scolastiche. Un giorno l'insegnante di scuola primaria analizza più a fondo da un punto di vista logico la definizione di quadrato a partire dal rettangolo e mostra come la richiesta che evidenzia la "differenza specifica" tra il "genere prossimo" rettangoli ed il "sottogenere" quadrati riguarda solo la lunghezza dei lati (che devono essere tutti congruenti). Quindi, dopo aver disegnato un quadrato alla lavagna, sostiene che esso è un particolare tipo di rettangolo. La misconcezione che negli anni potrebbe essersi creata nell'allievo, che l'immagine prototipo di rettangolo è una figura che *deve* avere i lati consecutivi di lunghezze diverse, potrebbe a questo punto creare un conflitto cognitivo con la nuova immagine proposta dall'insegnante. Tale possibile misconcezione iniziale è da noi considerata "inevitabile", in quanto dipende dalla necessaria gradualità dell'introduzione dei saperi che, per essere proposti, si devono ancorare a rappresentazioni semiotiche che spesso nascondono la totalità e la complessità del concetto. Risulta in effetti impensabile poter proporre inizialmente in un colpo solo tutte le considerazioni necessarie per poter caratterizzare un concetto dal punto di vista matematico e questa scelta obbligata dipende soprattutto dagli *ostacoli ontogenetici*.

Esempi di misconcezioni "evitabili"

1. Uno degli esempi più chiari e riconoscibili di questo tipo di misconcezione verte su un fatto avvenuto durante un esame di Matematica all'Università, presso la Facoltà di Scienze della Formazione Primaria.
In questa occasione si è chiesto ad uno studente non frequentante di spiegare che cos'è un angolo.
A questa sollecitazione del docente lo studente risponde:
«Un angolo è la lunghezza dell'arco»
e, dopo aver chiesto se poteva disegnare, lo studente realizza la seguente "classica" rappresentazione che mette in evidenza l'arco che, a suo parere, identifica l'angolo:

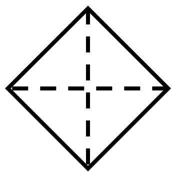


Alla provocatoria sollecitazione del docente:
«Allora, a mano a mano che ti sposti con l'"archetto" l'angolo diventa sempre più ampio?», supportata dalle seguenti aggiunte al precedente disegno:



lo studente risponde:
«È vero, non ci avevo mai pensato!»
La continua, univoca e impropria rappresentazione basata sull'"archetto" fornita da insegnanti diversi, anno dopo anno, ha dato forza nella mente dello studente a caratteristiche "parassite" della semiotica a sfavore del concetto stesso. L'allievo ha cioè considerato alcune informazioni derivanti dalla rappresentazione, in questo caso la lunghezza dell'"archetto", come caratteristica rilevante del concetto in gioco, anche se in realtà esse sono in contrasto con il sapere matematico. In altri casi, l'"archetto" ha condizionato alcuni studenti a concepire come angolo la parte di piano limitata dall'"archetto" stesso.
La misconcezione che si è generata nell'allievo è quindi, a nostro parere, "evitabile" in quanto dipende da due diverse cause: la reiterata proposta della stessa rappresentazione fornita da insegnanti, ma anche la scelta della rappresentazione stessa che, meno di altre, rispetta le proprietà del concetto che si vuole far apprendere (la limitatezza dell'archetto e della parte di piano da esso individuata, contrasta con l'illimitatezza dell'angolo in matematica).

2. Durante una sperimentazione in una classe IV di scuola primaria si è presentata la seguente situazione, ampiamente studiata nella letteratura di ricerca in didattica della matematica. Dopo aver costruito dei fogli quadrati di carta dove si erano anche evidenziate le pieghe in corrispondenza delle diagonali, il ricercatore ha disposto il proprio modello di quadrato nella seguente "inaspettata" posizione rispetto a quella "classica" scelta dai bambini per parlare di quadrato:



A questa provocazione i bambini hanno obbiettato: «Quello che hai in mano tu è un rombo, quello che abbiamo in mano noi è un quadrato».
(I bambini tenevano il quadrato disposto nel modo stereotipo classico, con due lati paralleli al pavimento).
Il ricercatore ha allora sollecitato la discussione domandando loro: «Perché quello che ho in mano io è un rombo e il vostro è un quadrato?».
Bambini: «Perché la maestra ci ha detto che il rombo ha le diagonali *orizzontali* e *verticali*, mentre il quadrato ha le diagonali *oblique*».
Nella logica di ciò che era stato loro insegnato, i bambini avevano ragione: la risposta risultava coerente rispetto all'insegnamento che avevano ricevuto. La rappresentazione e soprattutto l'indicazione verbale che l'insegnante aveva fornito ai propri allievi, in buona fede, allo scopo di aiutarli, risultava in realtà un ostacolo all'apprendimento, dato che fissava l'attenzione solo su una particolare posizione assunta dall'oggetto. Tale posizione appariva intuitiva per gli allievi, essendo percettivamente immediata, ma celava le caratteristiche matematiche del concetto.

6 Rapporto tra geometria e abilità visuospaziali

In ambito psicologico il problema di fornire una definizione di abilità visuospaziali non è nuovo e riflette il numero elevato di approcci che vi si sono interessati. Il termine *spaziale* è spesso legato alla capacità di muoversi nello spazio, e per questo motivo, alcuni studiosi fanno coincidere le abilità spaziali con la capacità di orientamento. Tale approccio permette di distinguere ad esempio, tra *rappresentazione egocentrica* e *allocentrica dello spazio* (Carlson-Radvansky, Irwin, 1994), dove la prima indica una codifica delle informazioni spaziali basata sulla posizione del proprio corpo, mentre la seconda, fa riferimento alla capacità di stabilire la posizione di un oggetto in base alla posizione di uno o più oggetti nello spazio, indipendentemente dal proprio punto di vista. Un'altra distinzione riguarda la differenza tra una rappresentazione di tipo *route*, basata sul punto di vista della persona che si muove nello spazio o *survey*, che consente una visione dall'alto dell'ambiente, per questo anche chiamata a volo d'uccello (Tversky, 1991).
Tuttavia, ricerche neurofisiologiche mostrano che il sistema visivo dei primati e degli esseri umani è composto da due vie di trasmissione delle informazioni: la via dorsale o *where system* (vedi Ungerleider, Mishkin,

1982), che ha la funzione di elaborare movimenti e informazioni spaziali, permettendo di rispondere alla domanda "Dove si trova un oggetto"; e la via ventrale o *what system,* che appare importante nel riconoscere la forma degli oggetti e le caratteristiche percettive degli stessi, permettendo quindi di rispondere alla domanda "Di che oggetto/forma si tratta?" (Van Essen, Anderson, Felleman, 1992; Smith, Jonides, 1999). Pertanto definire le abilità visuospaziali riferendosi esclusivamente all'orientamento spaziale o alla capacità di stimare la posizione di un oggetto nello spazio appare riduttivo.

Alcuni studiosi hanno tentato di classificare le abilità visuospaziali ma l'unico dato certo che emerge dalle varie ricerche è che l'abilità spaziale non è un concetto unitario, ma può essere distinta in diversi fattori. A questo proposito, McGee (1979) distingue, per esempio la *visualizzazione*, ovvero la capacità di manipolare e ruotare gli oggetti e l'*orientamento,* ovvero la capacità di mantenere l'orientamento spaziale rispetto al proprio corpo.

Linn e Peterson (1985) invece propongono una divisione in tre fattori:

- *percezione spaziale,* intesa come l'abilità di determinare dei rapporti spaziali in funzione dell'orientamento del proprio corpo;
- *rotazione mentale,* ovvero la capacità di ruotare oggetti bi- e tri-dimensionali in modo rapido e accurato;
- *visualizzazione spaziale,* che consente di manipolare delle informazioni spaziali presentate in modo non convenzionale.

Sia la rotazione mentale che la visualizzazione spaziale presuppongono l'utilizzo di *immagini mentali*. Kosslyn (1980; 1994) sostiene che l'immagine mentale non è una semplice esperienza fenomenica, ma piuttosto una forma di rappresentazione interna in cui è possibile manipolare l'aspetto visivo e/o spaziale di un oggetto fisico.

Cornoldi, De Beni, Giusberti e Massironi (1998) e Cornoldi, De Beni e Mammarella (2008) propongono la distinzione tra *traccia visiva* e *immagine generata*, dove la prima ha origine direttamente dalla percezione visiva di un oggetto (ad esempio: vedo un ombrello rosso) e ne conserva, pertanto, alcune proprietà, mentre la seconda deriva da un'informazione conservata nella memoria a lungo termine sotto forma di immagine (ad esempio: quando si cerca di ricordare l'immagine della Torre Eiffel di Parigi). Una differenza tra le due forme di immagini, risiede nel controllo attentivo necessario per mantenerle vivide ed attive nella nostra memoria, quindi, mentre la traccia visiva necessita di uno scarso controllo attentivo per restare attiva nella nostra mente, l'immagine generata ha bisogno di un alto grado di controllo attentivo. Kosslyn (1980; 1994) ipotizza che sia le tracce visive che le immagini generate vengano mantenute attive all'interno di un sistema di memoria a breve termine che lui denomina *visual buffer*. Tale sistema consente di esplorare le proprietà visive dell'immagine, di analizzarne la posizione nello spazio, di trasformare, ruotare e di aggiungere ulteriori proprietà derivate da informazioni già possedute in memoria a lungo termine. La memoria di lavoro visuospaziale (MLVS) condivide molte caratteristiche con il *visual buffer* descritto da Kosslyn, nonostante i due paradigmi sperimentali abbiano, poi, seguito direzioni diverse.

La MLVS può essere definita come un sistema che consente di manipolare e mantenere per un breve periodo di tempo informazioni visive e spaziali (Baddeley, 1986). La distinzione tra una componente visiva ed una spaziale entro la MLVS è ben documentata all'interno della letteratura psicologica. Logie (1995) propose l'esistenza di due sottocomponenti: il *Visual Cache*, un magazzino temporaneo per le informazioni visive come forme, colori, tessiture e orientamento di oggetti e l'*Inner Scribe*, un sistema spaziale legato al mantenimento temporaneo di movimenti e sequenze di movimenti in grado di rinfrescare le tracce provenienti dal Visual Cache. Il significato attribuito da Logie (1995; Baddeley, Logie, 1999) al termine spaziale, faceva riferimento non solo a posizioni nello spazio fisico ma anche a rappresentazioni motorie ed era impiegato per ridurre l'ambiguità insita nel termine stesso. Infatti, le rappresentazioni spaziali nella memoria di lavoro permettono di pianificare azioni mentali che possono essere eseguite immediatamente o codificate per un utilizzo successivo. Quindi il termine spaziale può riferirsi a movimenti sia fisici, ovvero, rappresentazioni di movimenti in corso o compiute dal soggetto, sia mentali, intesi come pianificazione o simulazione di azioni su delle immagini mentali. Cornoldi e Vecchi (2003; vedi anche Pazzaglia, Cornoldi, 1999; Mammarella, 2008; Mammarella, Pazzaglia, Cornoldi, 2008) propongono invece una distinzione in tre componenti, all'interno della MLVS. Nello specifico, gli Autori distinguono tra *memoria visiva, memoria spaziale-sequenziale e spaziale-simultanea*. La memoria visiva consente di mantenere ed elaborare informazioni quali la forma di un oggetto, la tessitura ed il colore, la memoria spaziale-sequenziale consente di mantenere il ricordo di posizioni presentate in successione temporale, mentre quella spaziale-simultanea di ricordare posizioni presentate contemporaneamente. Quindi, se nei compiti sequenziali l'ordine riveste un ruolo cruciale, in quelli simultanei è la configurazione globale degli stimoli ad essere rilevante (per un approfondimento della MLVS si veda il cap. 8).

A livello intuitivo il legame tra abilità visuospaziali, immagini mentali, MLVS e geometria è abbastanza scontato: per risolvere un problema di geometria, ad esempio, è spesso necessario rappresentarsi correttamente la figura di cui si sta parlando e compiere su di essa delle trasformazioni per giungere al risultato corretto. Il riconoscimento di figure geometriche, implica non solo aspetti percettivi, ma anche la capacità di recuperare dalla memoria informazioni sulle proprietà di quella data figura. Anche la riproduzione di una figura geometrica, ad esempio, attraverso il disegno, richiede di generare un'immagine mentale della figura, di mantenerla attiva per un certo periodo di tempo e di confrontare la propria produzione grafica con l'immagine mentale generata. Altri compiti di geometria richiedono, poi, di eseguire trasformazioni di vario tipo.

Fino ai 6 anni i bambini sembrano capaci di svolgere le prime due operazioni (riconoscimento e riproduzione) ma non di ruotare e trasformare immagini mentali (Rosser, Lane, Mazzeo, 1988). I bambini in età prescolare giudicano diverse delle figure congruenti, ma ruotate nello spazio (Rosser, 1994). Le ricerche in ambito evolutivo sottolineano l'importanza di coinvolgere attivamente i bambini, non solo a livello percettivo e motorio, ma anche nel creare e trasformare immagini mentali: la possibilità, a 5 anni, di eseguire dei movimenti diretti verso degli oggetti posizionati in una stanza, conduce ad un migliore ricordo della posizione di tali oggetti (Poag, Cohen, Weatherford, 1983). Fornire istruzioni su aspetti spaziali attraverso un approccio metacognitivo, aumenta la capacità di bambini di 4 e 6 anni di leggere ed apprendere mappe più facilmente (Frank, 1987).

I risultati provenienti da alcuni studi sulle differenze individuali (Hannafin, 2004; Hannafin, Vermillion, Truxau, Liu, 2008) mostrano, però, il ruolo cruciale delle abilità visuospaziali nell'apprendimento della geometria: ragazzi con alte abilità visuospaziali ottengono migliori prestazioni, rispetto a quelli con basse abilità visuospaziali, in un programma computerizzato utilizzato per l'apprendimento della geometria.

Riassumendo i pochi studi presenti in letteratura, possiamo sintetizzare affermando che è fondamentale fornire un'educazione relativa alle abilità visuospaziali, quindi coinvolgere i bambini in situazioni di apprendimento in modo attivo, tuttavia, è importante anche analizzare le differenze individuali, dato che possedere delle buone abilità visuospaziali sembra predire il successo ottenuto in prove di geometria.

Allo stato attuale della ricerca, purtroppo, non esistono studi che abbiano indagato il rapporto tra MLVS e geometria, eppure si può ipotizzare che la memoria visiva, spaziale-simultanea e -sequenziale siano maggiormente coinvolte nel riconoscimento delle figure, anche in posizioni non

convenzionali, e nel confronto tra figure, mentre la memoria visuospaziale attiva, che consente non solo di recuperare, ma anche di manipolare ed elaborare informazioni visive e spaziali, sia coinvolta in compiti di rotazione e traslazione di figure.
Resta, inoltre, da indagare ulteriormente il ruolo delle differenze individuali: individui con alta/bassa MLVS ottengono prestazioni diverse nelle prove di geometria? Le abilità visuospaziali sono coinvolte solo nel riconoscimento e nella trasformazione di figure geometriche o anche nella capacità di risolvere i problemi geometrici? E' possibile stabilire una relazione tra misconcezioni in geometria ed abilità visuospaziali, ovvero, è possibile che individui con basse abilità visuospaziali incorrano più spesso in misconcezioni?
Questi sono solo alcuni dei quesiti che le future ricerche dovranno cercare di risolvere.

7 In sintesi

Il presente capitolo passa in rassegna il ruolo della geometria nella storia della matematica, andando poi a discutere l'obiettivo della didattica in funzione dei cambiamenti evolutivi. Viene sottolineata l'importanza di insegnare ai bambini della scuola dell'infanzia e della scuola primaria la geometria tridimensionale, più vicina alle esperienze della vita quotidiana, per affrontare la geometria piana solo in un secondo momento. Sempre in riferimento alla didattica viene evidenziato il rapporto continuo tra realtà empirica e geometria: i modelli concreti possono essere impiegati come supporto alla creazione di concetti astratti, ma in alcuni casi possono addirittura ostacolarne lo sviluppo.
Il capitolo descrive, in seguito, gli studi pioneristici di Piaget nell'ambito della geometria, ed il modello dei coniugi Van Hiele che tenta di coniugare l'aspetto dello sviluppo psicologico a quello educativo. Il paragrafo successivo, dopo aver definito il concetto di misconcezione, va ad analizzare le differenze tra misconcezioni evitabili, determinate da errate scelte didattiche, ed inevitabili, ovvero non direttamente legate alla didattica. Il capitolo si chiude con una breve revisione della letteratura sulle abilità visuospaziali e sulla loro relazione con l'apprendimento della geometria. Ad ora esiste uno scarso numero di ricerche volto ad analizzare

tale relazione, ma emergono una serie di quesiti che ci auspichiamo possano essere risolti attraverso studi futuri.

Bibliografia

1) Arrigo G., Sbaragli S., *I solidi. Riscopriamo la geometria*, Carocci, Roma, 2004.
2) Baddeley A. D., *Working Memory*. Oxford: Oxford University Press, 1986.
3) Baddeley A. D., Logie R. H., Working memory: the multiple-component model. In A. Miyake, P. Shah. (a cura di), *Models of Working Memory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999, 28-61.
4) Bausano M. K., Jeffrey W. E. (1975). Dimensional salience and judgments of bigness by three-year-old children. *Child Development*, 46, 988–991.
5) Boulton-Lewis G. M. (1987). Recent cognitive theories applied to sequential length measuring knowledge in young children. *British Journal of Educational Psychology*, 57, 330–342.
6) Carlson-Radvansky L. A., Irwin D. (1994). Reference frame activation during spatial term assignment. *Journal of Memory and Language*, 33, 646-671.
7) Chamorro M.C. (2001-2002). Le difficoltà nell'insegnamento-apprendimento delle grandezze nella scuola di base, *La matematica e la sua didattica*, I parte: 4, 2001, 332-351; II parte: 1, 2002, 58-77.
8) Clements D. H. (1999c). Teaching length measurement: Research challenges. *School Science and Mathematics*, 99, 5–11.
9) Clements D. H., Battista M. T., Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* New York, 1992, 420–464.
10) Cornoldi C., Vecchi T., *Visuospatial working memory and individual differences*. Hove: Psychology Press, UK, 2003.
11) Cornoldi C., De Beni R., Giusberti F., Massironi M., Memory and Imagery: A visual trace is not a mental image. In: M. A., Conway, S. E., Gathercole, and C., Cornoldi, (Eds). *Theories of Memory, Vol. II.* Psychology Press, Hove (UK), 1998, 87-110.
12) Cornoldi C., De Beni R., Mammarella, I. C., Mental Imagery. In E. Roediger III (Ed.). *Learning and Memory: A comprehensive Reference. – Vol. 2. Cognitive Psychology of Memory.* (J. Byrne Editor), Oxford: Elsevier, 2008, pp. 103-124.
13) Cottino L., Foresti I., Gualandi C., Nobis C., Ponti A., Ricci M., Sangiorgi M.C., Sbaragli S., Zola L., *Geometria*, Trento, Erickson, 2010, in corso di stampa.
14) Cottino L., Sbaragli S., *Le diverse "facce" del cubo*, Carrocci, Roma, 2004.

15) Crowley M. L., The van Hiele model of the development of geometric though. In *Learning and Teaching Geometry, K-12***,** 1987 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, Mary Montgomery Lindquist, Reston, Va.: National, 1987, 1-16.
16) D'Amore B., *Geometria*, Progetto Ma.S.E., vol. V, Angeli ed., Milano, 1987.
17) D'Amore B., (1993). Esporre la matematica appresa: un problema didattico e linguistico, *La matematica e la sua didattica*, 3, 289-301.
18) D'Amore B., *Elementi di didattica della matematica*, Pitagora, Bologna, 1999.
19) D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., *Area e perimetro. Aspetti concettuali e didattici*, Erickson, Trento, 2006.
20) D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., (2009). La formazione degli insegnanti di matematica, problema pedagogico, didattico e culturale, *La matematica e la sua didattica*. 23, 261-298.
21) D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I., Marazzani I., Sbaragli S., *Difficoltà nell'apprendimento della matematica. Il punto di vista della didattica*, Erickson, Trento, 2008.
22) D'Amore B., Sbaragli S., (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione", *La matematica e la sua didattica*, 2, 139-163.
23) Dehaene S., Izard V., Pica P., Spelke E. (2006). Core knowledge of geometry in ad Amazonian indigen group. *Science*, 311, 381-384.
24) Di Sessa A., 1983, Phenomenology and the evolution of intuition. In: Gentner D., Stevens A., (a cura di), *Mental models*, Laurence Erlabaum, Hillsdale N.J., 1983, 15-33.
25) Enriques F., *Problemi della scienza*, Zanichelli, Bologna, 1906.
26) Fabricius W. V., Wellman H. M. (1993). Two roads diverged: Young children's ability to judge distances. *Child Development*, 64, 399–414
27) Fandiño Pinilla M. I., *Curricolo e valutazione*, Pitagora, Bologna, 2002.
28) Fischbein E., (1993). The theory of figural concepts, *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-162.
29) Gentner D., (1983). Structure mapping: a theoretical frame work, *Cognitive Science*, 7, 156-166.
30) Giofrè D., Mammarella I. C., Lucangeli D. (2009). L'apprendimento della geometria in bambini dai 4 ai 6 anni. *Difficoltà in Matematica*, 5, 21-38.
31) Giovannoni L. (1996), Misure di estensione superficiale nella scuola dell'infanzia, *La matematica e la sua didattica*, 4, 394-423.
32) Hannafin R. D. (2004). Achievement Differences in Structured Versus Unstructured Instructional Geometry Programs. *Educational Technology Research & Development*, 52, 19-32.
33) Hannafin R. D., Vermillion J. R., TruxauM. P. Liu, Y. (2008). Effects of Spatial Ability and Instructional Program on Geometry Achievement. *The Journal of Educational Research*, 101, 148-156.
34) Hermer L., Spelke E. (1996). Modularity and development: The case of spatial reorientation. *Cognition*, 61, 195–232.
35) Hiebert J. C. (1981). Cognitive development and learning linear measurement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 12, 197–211.

36) Kahneman D., Tversky A., On the study of statistical intuitions. In: Kahneman D., Slovic P., Tversky A., (a cura di), *Judgement under uncertainty: heuristics and biases*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982, 493-508.
37) Káldy Z., Leslie, A. M. *Competition for working memory resources in 9-month-olds infants*. International Conference on Infant Studies (ICIS), April, Toronto, Ont. Canada, 2002.
38) Kavšek M. J. (1999). Infants' responsiveness to line junctions in curved objects. *Journal of Experimental Child Psychology,* 72, 177-192.
39) Kieran C., (1981). Concepts associated with the equality symbol, *Educational studies in mathematics*, 12, 317-326.
40) Kosslyn S. M., *Image and Mind.* Cambridge, MA: Harvard University Press, 1980.
41) Kosslyn S. M., *Image and Brain.* Cambridge, MA: MIT Press, 1994.
42) Learmonth A. E., Newcombe N. S., Huttenlocher J. (2001). Toddlers' Use of Metric Information and Landmarks to Reorient, *Journal of Experimental Child Psychology*, 80, 225–244.
43) Linn M. C., Peterson A. C. (1985). Gender differences in verbal ability: A meta-analysis. *Psychological Bulletin*, 104, 53-69.
44) Logie R .H., *Visuo-spatial working memory.* Hove, UK: Lawrence Erlbaum Associates, 1995.
45) Lourenco S. F., Huttenlocher J. (2008). The Representation of Geometric Cues in Infancy, *Infancy,* 13, 103 – 127.
46) Lovell K. (1959). A follow-up study of some aspects of the work of Piaget and Inhelder on the child's conception of space. *British Journal of Educational Psychology,* 29, 104–117.
47) Maier H., (1993). Problemi di lingua e di comunicazione durante le lezioni di matematica, *La matematica e la sua didattica*, 1, 69-80.
48) Maier H., (1998). L'uso di mezzi visivi nelle lezioni di geometria", *La matematica e la sua didattica,* 3, 271-290.
49) Mammarella I. C. (2008). La memoria di lavoro visuospaziale: Una rassegna di studi recenti. *Giornale Italiano di Psicologia,* 35, 507-538.
50) Mammarella I. C., Pazzaglia F., Cornoldi, C. (2008). Evidence for different components in children's visuospatial working memory. *British Journal of Developmental Psychology,* 26, 337-355.
51) Maratsos M. P. (1973). Decrease in the understanding of the word "big" in preschool children, *Child Development,* 44, 747–752.
52) Martini B., Sbaragli S., *Insegnare e apprendere la matematica*, Tecnodid, Napoli, 2005.
53) McGee M. G. (1979). Human Spatial Abilities: Psychometric Studies and Environmental, Genetic, Hormonal, and Neurological Influences. *Psychological Bulletin,* 86, 889-918.
54) Mervis C. B., Rosch E. (1981). Categorization of natural objects. *Annual Review of Psychology,* 32, 89–115.

55) Miller K. F., Baillargeon R. (1990). Length and distance: Do preschoolers think that occlusion brings things together? *Developmental Psychology,* 26, 103–114.
56) Mullet E., Paques P. (1991). The height + width = area of a rectangle rule in five-year-olds: effects of stimulus distribution and graduation of the response scale. *Journal of Experimental Child Psychology,* 52, 336–343.
57) Needham A. (2001). Object recognition and object segregation in 4.5-month-old infants. *Journal of Experimental Child Psychology,* 78, 3–22.
58) Newcombe N., Huttenlocher,J., Learmonth A. (1999). Infants' coding of location in continuous space. *Infant Behavior and Development,* 22, 483–510.
59) Page E. I. (1959). Haptic perception: A consideration of one of the investigations of Piaget and Inhelder, *Educational Review,* 11, 115–124.
60) Pazzaglia F., Cornoldi C. (1999). The role of distinct components of visuo-spatial working memory in the processing of texts, *Memory,* 7, 19-41.
61) Peano G. (1894). Sui fondamenti della geometria, *Rivista di matematica*, IV, 51-90. (Su *Opere Scelte*, Roma, 1959, III).
62) Petitto A. L. (1990). Development of numberline and measurement concepts. *Cognition and Instruction,* 7, 55–78.
63) Piaget J., Inhelder B., *La rappresentazione dello spazio nel bambino.* Firenze: Giunti e Barbera, 1979.
64) Piaget J., Inhelder B., *Lo sviluppo delle quantità fisiche nel bambino*, Giunti Barbera, Firenze, 1962.
65) Piaget J., Inhelder B., Szeminska A., *La geometria spontanea nel bambino,* Giunti Barbera, Firenze, 1948.
66) Piaget J., Inhelder B., Szeminska, A. *The child's conception of geometry*. London: Routledge and Kegan Paul, 1960.
67) Poag C. K., Cohen R., Weatherford D. L. (1983). Spatial representations of young children: the role of self- versus adult-directed movement and viewing, *Journal of Experimental Child Psychology,* 35, 172-179.
68) Poincaré H., *La science et l'hipothèse,* Flammarion, Paris, 1902.
69) Resnick L.B., Ford W.W., *Psicologia della matematica e apprendimento scolastico,* Sei, Torino, 1981.
70) Rosser R. A. (1994). Children's solution strategies and mental rotation problems: The differential salience of stimulus components, *Child Study Journal*, 24, 153–168.
71) Rosser R. A., Lane S., Mazzeo J. (1988). Order of acquisition of related geometric competencies in young children, *Child Study Journal,* 18, 75-90.
72) Sandhofer C. M., Smith L. B. (1999). Learning color words involves learning a system of mappings, *Developmental Psychology,* 35, 668–679.
73) Sbaragli S., (2005). Misconcezioni "inevitabili" e misconcezioni "evitabili", *La matematica e la sua didattica,* 1, 57-71.
74) Sbaragli S., (2006), La capacità di riconoscere analogie: il caso di area e volume, *La matematica e la sua didattica*, 2, 247-285.
75) Schoenfeld A.H., *Mathematical problem solving,* Academic Press, New York, 1985.

76) Shaughnessy J. M., Problem-Solving derailers: The influence of misconceptions on problem-solving performance. In Silver E.A., (a cura di), *Teaching and learning mathematical problem solving*: *Multiple research perspectives,* Lawrence Erlbaum, Hillsdale N.J., 1985, pp. 399-415.
77) Silver E. A., Research on teaching mathematical problem solving: some under represented themes and needed directions. In: Silver E.A., (a cura di), *Teaching and learning mathematical problem solving*. *Multiple research perspectives,* Lawrence Erlbaum, Hillsdale N.J., 1985, pp. 247-266.
78) Slater A., Morison V., Somers M., Mattock A., Brown E., Taylor D. (1990). Newborn and older infants' perception of partly occluded objects. *Infant Behavior and Development*, 13, 33–49.
79) Smith E. E., Jonides J. (1999). Storage and executive processes in the frontal lobes. *Science,* 283, 1657-1661.
80) Speranza F., La geometria dalle cose alla logica. In: D'Amore B. (a cura di). *La matematica e la sua didattica*. Atti dell'omonimo Convegno Nazionale, Castel San Pietro Terme, Armando, Roma, 106, 1987.
81) Stavy R., Tirosh D., *Perché gli studenti fraintendono matematica e scienze?,* Erickson, Trento, 2000.
82) Tversky B. (1991). Cross-Cultural and Developmental Trends in Graphic Productions. *Cognitive Psychology*, 23, 515-557.
83) Ungerleider L. G., Mishkin M., Two cortical visual systems. In D. J. Ingle, M. S. Goodale, R. J. W. Mansfield (a cura di), *The analysis of visual behaviour*. Cambridge, MA: MIT Press, 1982, 549-586.
84) Van Essen D. C., Anderson C. H., Felleman D, J. (1992). Information processing in the primate visual system: An integrated systems perspective. *Science,* 255, 419-423.
85) van Hiele P.M., *Structure and insight. A theory of Mathematics Education*, Academic Press., Orlando, USA, 1986.
86) Voss J. F., Blais J., Means M. L., Greene T. R., Ahwesh E., Informal reasoning and subject matter knowledge in the solving of economics problems by naïve and novice individuals. In Resnick L. B., (a cura di), *Knowing, learning and instruction: Essays in honor of Robert Glaser,* Lawrence Erlbaum, Hillsdale N.J., 1989, 217-250.
87) Wagner S. (1981). Conservation of equation and function under transformations of variable, *Journal for research in mathematics education*, 12, 107-118.
88) Wilcox T., Schweinle A. (2002). Object individuation and event mapping: Developmental changes in infants' use of featural information, *Developmental Science*, 5, 132–150.
89) Wynn K. (1992). Addition and subtraction by human infants, *Nature*, 358, 749-750.
90) Wolf Y. (1995). Estimation of Euclidian quantity by 5- and 6- year-old children: Facilitating a multiplication rule, *Journal of Experimental Child Psychology*, 59, 49-75.

91) Xu F., Carey S. (1996). Infants’ metaphysics: The case of numerical identity, *Cognitive Psychology*, 30, 111-153.